Математическое моделирование внутренних течений

В современной науке для изучения самых разнообразных природных явлений, технологических процессов и экологических проблем широко используется математическое моделирование. Исходный объект заменяется математической моделью, которая исследуется средствами вычислительной математики. Математическое моделирование сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа с моделью объекта дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в различных ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Совместное использование физического и вычислительного экспериментов в исследовании объекта позволяет, с одной стороны, уменьшить количество натурных дорогостоящих измерений, а с другой стороны - провести верификацию и усовершенствование математических моделей.

Широкий круг проблем, стоящих перед современной наукой и техникой, связан с изучением движения жидкости. Для описания явлений используются модели стационарных и нестационарных течений, вязкой и невязкой жидкости, пограничных слоев и другие.

В рамках выбранной математической модели, состоящей из системы дифференциальных уравнений и краевых условий (и начальных - для нестационарной задачи), определяется поведение течения жидкости в тех или иных условиях. Эффективным способом решения дифференциальных уравнений являются численные методы. В отличие от аналитических методов, где практически для каждой задачи разрабатываются свои самостоятельные приемы решения, численные методы отличаются большей универсальностью и применимы для исследования широкого класса задач.

При подборе методов решения необходимо учитывать особенности исследуемых течений и соответствующих математических моделей. В диссертационной работе рассматриваются стационарные, внутренние, однофазные, химически однородные течения. Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье - Стокса.

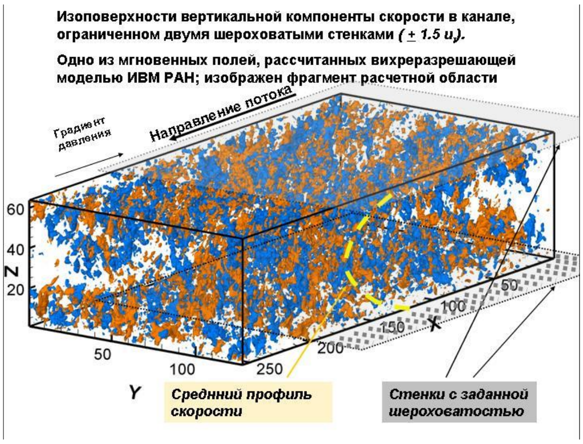

Рис. 4.4 Пример внутреннего течения.

1) $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+ +\frac{\partial}{\partial x}(k_1\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k_2\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(k_3\frac{\partial u}{\partial z}) \quad (1)$$

2) $$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+ +\frac{\partial}{\partial x}(k_1\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k_2\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(k_3\frac{\partial v}{\partial z}) \quad (2)$$

3) $$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(k_1\frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_2\frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_3\frac{\partial w}{\partial z}) \quad (3)$$

4) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Решаем эту систему уравнений с помощью метода расщепления по физическим параметрам.

$$u^{n+1} = u^* - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial x} \quad (5)$$

$$v^{n+1} = v^* - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_2}{\partial y} \quad (6)$$

$$w^{n+1} = w^* - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_2}{\partial z} \quad (7)$$

$P = P_1 + P_2$, где P_1 - зависит от x координаты, P_2 - зависит от y и z координат.

Следовательно, можно найти Q - приток с помощью компоненты скорости u

$$Q = \iint u dydz$$

Подставив в последнее уравнение (5), получим

$$Q = \iint (u^* - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial x})dydz \qquad Q = S^* - S\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial x} \qquad \frac{S^* - Q}{S} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial x}$$

Затем в уравнение неразрывности (4) подставляем (5), (6) и (7)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(v^* - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_2}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(w^* - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_2}{\partial z}) = 0$$

И наконец, приводим к такому виду

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} = \rho(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z})$$

Полученное уравнение Пуассона решаем с помощью матричной прогонки.